Zmienna losowa

Wylosowanie pewnego elementu z populacji generalnej – *zdarzenie losowe*, natomiast parametr klasyfikujący zdarzenie – *zmienna losowa*. W kontekście pomiarów:

- zdarzenie losowe – wykonanie pomiaru wielkości fizycznej,
- zmienna losowa – wartość liczbowa miary wyniku pomiaru.

Zmienne losowe oznaczymy dużymi literami X,Y, ..., a wartości przyjmowane przez zmienne losowe małymi x, y, ... lub x_i.

Zmienna losowa

skokowa ← → ciągła

Każdemu zdarzeniu można przypisać pewne prawdopodobieństwo P(X=a).

Dystrybuanta F(x) jest łącznym prawdopodobieństwem uzyskania wyniku z przedziału od $-\infty$ do x.

$$P(X<x)=P(-\infty<X<a)=F(x)$$

Dystrybuanta jest niemalejącą funkcją zmiennej losowej X. Gdy $x\to\infty$, to F(x)=1, gdy $x\to-\infty$, to F(x)=0.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej: $P(X=x)=p_i$

Dla ciągłej zmiennej losowej stosuje się *gęstość prawdopodobieństwa* f(x) zmiennej losowej – pochodna dystrybuanty:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

Rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej nazywamy zależność gęstości prawdopodobieństwa f(x) od wartości x zmiennej losowej X. Znając gęstość prawdopodobieństwa można łatwo obliczyć dystrybuantę ze wzoru

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Parametry rozkładu zmiennych losowych

Zwykle nie znamy pełnego rozkładu prawdopodobieństwa lub jego znajomość nie jest dla nas interesująca, dlatego wystarcza nam wiedza o kilku jego charakterystycznych parametrach.

- wartość oczekiwana (nadzieja matematyczna)
- wariancja
- odchylenie standardowe
- momenty
- kwantyle (fraktyle)

<u>*Wartość oczekiwana*</u>. Oznaczenia:

E(X) – obliczona z postaci analitycznej rozkładu

μ - dla całej populacji

$\bar{x}$ - dla próby

Definicja (dla skokowej zmiennej losowej)

$$E(X)=\sum_i x_i p_i$$

gdzie p_i jest prawdopodobieństwem wystąpienia wartości x_i

lub (dla zmiennej losowej ciągłej)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Dla dowolnej funkcji Y=H(X) zmiennej losowej X wartość oczekiwana wyraża się wzorem

$$E\{H(X)\}=\sum_i H(x_i)p_i$$

Dla n-elementowej próby wartość oczekiwana sprowadza się do średniej arytmetycznej.

Wartość oczekiwana μ nie jest zmienną losową, jest nią natomiast średnia arytmetyczna z próby.

Wariancja. Oznaczenia:

$D^2(X)$ - obliczona z postaci analitycznej rozkładu

σ^2 – wariancja w populacji

S_x^2 - wariancja próby

Definicja: wartość oczekiwana kwadratu różnicy zmiennej losowej i jej wartości oczekiwanej

Dla zmiennej losowej skokowej

$$D^2(X) = E\{X - E(X)\}^2$$

co jest równoważne

$$D^2(X) = \sum \{x_i - E(X)\}^2 p_i$$

Dla skończonej populacji o liczebności n można E(X) zastąpić wartością średnią i wtedy

$$D^2(X) = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 \equiv S_x^2$$

Zatem wariancja jest średnią kwadratów odchyleń od wartości średniej

Dla zmiennej losowej ciągłej

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x_i - E(X)\}^2 f(x)dx$$

Odchylenie standardowe. Oznaczenia:

σ – odchylenie standardowe w populacji

S_x- odchylenie standardowe próby

Definicja: pierwiastek kwadratowy z wariancji

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$S_x = \sqrt{S_x^2}$$

Odchylenie standardowe ma ten sam wymiar co X i jest przyjmowane jako miara przypadkowej niepewności pomiarowej.

Moment k-ty zmiennej losowej X względem punktu d

$$m_k = E\{(X - d)^k\}$$

gdzie k- rząd momentu. Gdy d=0, to mówimy o *momentach bezwzględnych*, gdy d=E(X), to mówimy o *momentach centralnych*.

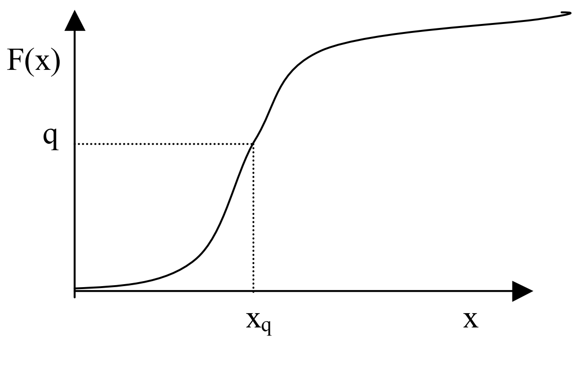
Wartość oczekiwana: d=0; k=1

Wariancja: d=E(X); k=2

Dla rozkładów symetrycznych momenty centralne rzędu nieparzystego zerują się.

Kwantyle

Kwantyl rzędu q ($0 \le q \le 1$) stanowi wartość x_q zmiennej losowej X, dla której dystrybuanta F(x) jest równa rzędowi kwantyla.



Najczęściej stosowane kwantyle:

kwartyl dolny	q=0.25
mediana	q=0.5
kwartyl górny	q=0.75