

Zadania na twierdzenia graniczne

Zadanie 1

Z partii towaru o wadliwości 3% pobrano próbę 500 elementową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba wadliwych elementów w próbie nie będzie przekraczać 4%.

Zadanie 2

- Jak duża powinna być liczba A , aby z prawdopodobieństwem 0.99 można było stwierdzić, że wśród pobranych losowo 200 sztuk z partii o wadliwości 2% liczba sztuk wadliwych nie przekroczy A ?
- Jaką należy postawić hipotezę, jeśli wśród 200 losowo pobranych sztuk liczba wadliwych przekracza wartość A ?

Zadanie 3

Wysłano 500 bitów przez modem, o którym wiadomo, że charakteryzuje się 96% sprawnością transmisji. sygnału. Z jakim prawdopodobieństwem możemy sądzić, że wśród owych 500 sygnałów jest co najwyżej 30 błędnych. Obliczenia przeprowadzić korzystając

- z nierówności Czebyszewa
- z twierdzenie Moivre'a-Laplace'a

Zadanie 4

Partia towaru ma wadliwość 3%. Ilu elementową próbę należy pobrać, aby z prawdopodobieństwem 95% można było stwierdzić, że liczba sztuk wadliwych w próbie będzie zawarta w granicach od 2% do 4%?

Zadanie 5

Partia towaru ma wadliwość 7%. Pobrano próbę 800 elementową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach od 6% do 9%?

Zadanie 6

Wśród żarówek produkowanych przez pewien zakład jest 4% braków. Ile żarówek należy pobrać, aby z prawdopodobieństwem 0.95 można było twierdzić, że będziemy mieli więcej niż 20 żarówek wadliwych?

Zadanie 7

Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby oczek przy rzucaniu kostką do gry. Korzystając z nierówności Czebyszewa oszacować prawdopodobieństwo $P(|X-3.5|>2.5)$. Wynik porównać z dokładną wartością tego prawdopodobieństwa.

Zadanie 8

Rzucamy monetą. Jak wielka winna być liczba rzutów n , aby prawdopodobieństwo p spełnienia nierówności $\left| \frac{k}{n} - 0.5 \right| < 0.1$, gdzie $\frac{k}{n}$ jest częstością względną wyrzuconych orłów, było większe niż 0.9? Należy skorzystać z nierówności Czebyszewa..

Zadanie 9

Łączymy się 300 razy z internetem korzystając z modemu, przy czym prawdopodobieństwo uzyskania połączenia za każdym razem jest równe 0.25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba uzyskanych połączeń będzie się różnić od najbardziej prawdopodobnej ich liczby nie więcej niż 0.1 ogólnej liczby łączy. Skorzystać z nierówności Czebyszewa.

Zadanie 10

Wariancja każdej z 4500 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jest równa 5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że średnia tych zmiennych odchyli się od jej wartości oczekiwanej nie więcej niż o 0.04.

Zadanie 11

Zmienna losowa Y jest średnią arytmetyczną 3200 niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z wartością oczekiwaną 3 i wariancją 2. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Y przyjmie wartość z przedziału (2.95, 3.075).

Zadanie 12

Zmienna losowa Y jest średnią arytmetyczną niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, a wariancja każdego składnika wynosi 5. Ile należy wziąć składników, aby Y z prawdopodobieństwem co najmniej 0.9973 nie odchyliła się od swej wartości oczekiwanej o więcej niż o 0.01?

Zadanie 13

Rzucamy 1000 razy kostką do gry. Znaleźć granice, w których z prawdopodobieństwem 0.99 będzie zawierać się łączna liczba oczek.

Zadanie 14

Przy działaniu pewnego programu komputerowego należy dodać 10000 liczb, z których każda jest dana z dokładnością 10^{-m} . Zakładając, że błędy zaokrągleń są wzajemnie niezależne i mają rozkład równomierny w przedziale $(-0.5 \cdot 10^{-m}, 0.5 \cdot 10^{-m})$, znaleźć granice, w których z prawdopodobieństwem większym niż 0.997 zawierać się będzie łączny rozkład sumy.

Zadanie 15

Partia zawiera $b=20\%$ braków. Jakie jest prawdopodobieństwo p , że w próbie liczącej $n=100$ sztuk stosunek $\frac{k}{n}$, gdzie k - liczba braków, odchyli się od b o mniej niż 0.2? To samo zadanie należy rozwiązać dla $n=400$ oraz $n=1600$. Co dzieje się z prawdopodobieństwem p , gdy liczba n wzrasta? Jakiego twierdzenia ilustrację stanowią powyższe trzy przypadki? Skorzystaj z nierówności Czebyszewa.

Zadanie 16

Prawdopodobieństwo wyprodukowania detalu pierwszej jakości w pewnym zakładzie wynosi 0.6. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród losowo wziętych 100 detali będzie 55 detali pierwszej jakości

Zadanie 17

Rzucamy symetryczną monetą. Znaleźć prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie 5100 razy.

Zadanie 18

Jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia 50 razy zjawiska A w serii 10000 doświadczeń, jeżeli doświadczenia są niezależne i prawdopodobieństwo zjawiska A wynosi 0.005.

Zadanie 19

W okresie 12h dokonano losowo 100 połączeń modemu z linią telefoniczną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w przedziale czasu 8.00-14.00 liczba połączeń zmieści się między 40 i 60?

Odpowiedzi:

1. 0.9065
2. a) $A \approx 6.3$ b) wadliwość $> 2\%$
3. a) $p > 1/3$ b) $p \approx 0.9887$
4. $n = 1118$
5. 0.8532
6. ok. 1485
7. $p \leq 7/15$, dokładna wartość wynosi $p=0$, jako prawdop. zdarzenia niemożliwego
8. $n > 250$
9. $p \geq 0.938$
10. 0.77
11. 0.97590
12. 450000
13. 3500 ± 140
14. $\approx \sqrt{3/2} \cdot 10^{-m+2}$
15. dla $n=100$ $p \geq 0.96$, dla $n=400$ $p \geq 0.9900$, dla $n=1600$ $p \geq 0.9975$
16. tw. lokalnego Moivre'a-Laplace'a: $\varphi(-1.02)/\sqrt{24} = 0.04385$
17. j/w: $\varphi(2)/50 = 0.00108$
18. j/w: $\varphi(0)/7.05 = 0.0566$
19. tw. globalne Moivre'a-Laplace'a: $P(40 \leq k \leq 60) \approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9544$