

Funkcje charakterystyczne rozkładów zmiennych losowych

Zadanie 1

Wyznacz funkcję charakterystyczną dla zmiennej losowej o wartościach 0 i 1 przyjmowanych z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Skorzystaj z niej przy obliczaniu EX oraz D^2X .

Zadanie 2

Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{dla } -a \leq x \leq a, \quad a > 0 \\ 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \end{cases}$$

Zadanie 3

Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ C \exp(-x) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

uprzednio wyznaczając stałą C . Wyznacz EX i D^2X .

Zadanie 4

Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej o gęstości $f(x) = C \exp(-|x|)$, uprzednio wyznaczając wartość C . Skorzystaj z tej funkcji przy wyznaczaniu EX i D^2X .

Zadanie 5

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej dyskretnej przyjmującej wartości 0,2,4,6 określona jest wzorem.

$$\varphi(t) = \frac{7}{24} + \frac{1}{3} e^{it} + \frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{8} e^{3it}$$

Wyznacz prawdopodobieństwo wystąpienia tych wartości.

Zadanie 6

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , której funkcja charakterystyczna ma postać $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

Zadanie 7

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , której funkcja charakterystyczna ma postać $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Skorzystaj z tego, że $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$ oraz dwóch pomocniczych wzorów na tzw. *całkę Laplace'a*:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{x \sin tx}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad \text{dla } x > 0$$

Odpowiedzi

1. $1 + 3 e^{it}$, $EX = 3$, $D^2X = 3/16$ 2. $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin at}{at} & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$ 3. $\varphi(t) = \frac{1}{1-jt}$ 4. $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $EX = 0$, $D^2X = 2$
5.

| | | | | |
|-------|------|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 2 | 4 | 6 |
| p_i | 7/24 | 1/3 | 1/4 | 1/8 |

 6. $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ 7. $f(x) = 0.5e^{-|x|}$