

Zadania na gęstości, dystrybuanty

Zad. 1

Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest gęstością prawdopodobieństwa? Znaleźć dystrybuantę i obliczyć prawdopodobieństwo $P(X < 1)$. Wyznaczyć EX i D^2X .

Zad. 2

Dla jakiej wartości parametru C funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 1 \\ \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa? Znaleźć dystrybuantę i obliczyć prawdopodobieństwo $P(X < 1)$. Wyznaczyć EX i D^2X .

Zad. 3

Dla jakiego a funkcja $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest gęstością prawdopodobieństwa? Znaleźć dystrybuantę i obliczyć prawdopodobieństwo $P(X < 1)$. Wyznaczyć EX i D^2X .

Zad. 4

Dana jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

Obliczyć EX i DX .

Zad. 5

Zbadaj istnienie momentów zwykłych i centralnych dla rozkładu Cauchy'ego o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Zad. 6

Sprawdzić, że funkcja $f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $n = 1, 2, \dots$ określa rozkład zmiennej losowej skokowej N . Jeśli tak, to obliczyć $P(N \geq 3)$.

Zad. 7

Zmienna losowa X przyjmuje wartości $0, 1, 2, 3$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $0.2, 0.3, 0.4$ i 0.1 . Znaleźć EX i D^2X .

Zad. 8

Czy istnieje wartość oczekiwana EX dla zmiennej losowej X określonej w sposób podany wzorem:

$$P(X = 2^k) = \frac{1}{2^k} \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

Zad. 9

Zmienna losowa podlega rozkładowi według trójkąta równoramiennego o podstawie $[a, 3a]$. Zbudować funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

Zad. 10

Pewna gra polega na rzucie trzema monetami i otrzymaniu wygranej 10zł w przypadku uzyskania 3 orłów. W pozostałych przypadkach traci się 6zł. Traktując kwotę pieniężną jako zmienną losową podać jej funkcję prawdopodobieństwa i dystrybuantę.

Odpowiedzi:

1. $a=2/\pi, F(x)=\text{artge}^x, (2/\pi)\text{artge}$

2. $c=1/\pi, F(x)=\begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 0.5 + \frac{1}{\pi} \arcsin x & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}, EX = 0, D^2X=0.5$

3. $a=1/\pi, F(x) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg x,$

4. $EX = \pi/2, DX = \sqrt{0.5\pi^2 - 2} \approx 0.69$

5. brak

6. $P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 1/3$

7. $EX=1.4, D^2X=0.84$

8. nie

9.

10.

X=k	-6	10
P(X=k)	7/8	1/8

x	$(-\infty, -6]$	$(-6, 10]$	$(10, +\infty)$
F(x)	0	7/8	1