O warunku równowagi dla sił zbieżnych

W zadaniach ze statyki można spotkać się z różnym sposobem rozwiązywania zadań, które dotyczą układu sił zbieżnych. Pierwszy sposób polega na potraktowaniu tego układu w taki sposób, jakby owej zbieżności nie było i wykorzystaniu warunku równowagi w postaci właściwej dla układu sił dowolnych, tj. $\Sigma P_{ix} = 0 \wedge \Sigma P_{iy} = 0 \wedge \Sigma M_{io} = 0$, podczas gdy dla układu sił zbieżnych, potrzeba i wystarcza skromniejszy warunek $\Sigma P_{ix} = 0 \wedge \Sigma P_{iy} = 0$. I właśnie jego wykorzystanie jest istotą drugiego sposobu.

Czy sięgnięcie po dodatkowe żądanie, by suma momentów względem dowolnie obranego punktu była zerem jest więc w ogóle dopuszczalne, a jeśli tak, to co zmienia w samym sposobie rozwiązania?

Otóż jest to działanie dopuszczalne, choć niekonieczne (!), ale znakomicie upraszczające rozwiązanie zadania, a swoboda wyboru punktu odniesienia O pozwala na wniesienie dodatkowego równania o możliwie najmniej skomplikowanej postaci. Dlatego chętnie sięga się po ten dodatkowy warunek.

Trzeba wiedzieć, że warunek $\Sigma M_{io} = 0$ jest tylko konsekwencją założenia, że mamy do czynienia z układem zrównoważonych sił zbieżnych i wynika z twierdzenia Varignona, które mówi, że:

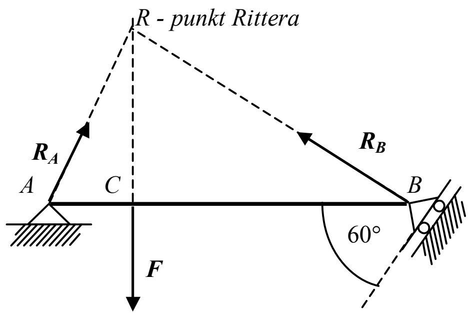
Wektor momentu siły wypadkowej $\boldsymbol{M}_{Wo}$ jest równy sumie wektorów momentów $\boldsymbol{M}_{io}$ pochodzących od poszczególnych sił układu, czyli $\Sigma \boldsymbol{M}_{Wo} = \Sigma \boldsymbol{M}_{io}$

W zrównoważonym układzie sił zbieżnych siła wypadkowa $\boldsymbol{W}$ jest wektorem zerowym, czyli jej dowolny moment też będzie zerem, a oczywistą konsekwencją tego jest fakt, że również $\Sigma \boldsymbol{M}_{io} = \boldsymbol{k}\Sigma M_{io} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \Sigma M_{io} = 0$ *(skalarnie)*

Przykład na dwoistość rozwiązania
Oblicz siły reakcji podpór nieważkiej belki AB z podporami w węzłach A i B, jeśli poddano ją działaniu siły $F = 30$kN. O belce wiadomo, że $AC = 2$ i $DB = 6$

A) Rozwiązanie bez sięgania po warunek $\Sigma M_{io} = 0$

Oznaczmy dwie niewiadome siły reakcji podpór w węzłach A i B jako $\boldsymbol{R_A}$ oraz $\boldsymbol{R_B}$, których kierunki wraz z siłą $\boldsymbol{F}$ przecinają się w punkcie Rittera. ∠CBR pochylenia siły $\boldsymbol{R_B}$ jest znany i wynosi 30°, gdyż dopełnia zadany kąt 60° pochylenia podstawy przegubu ruchomego do kąta półpełnego (*dlaczego?*)



Formalny zapis warunku równowagi układu 3 sił sprowadza się do zapisu dwóch równań:

$$\Sigma P_{ix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A \cos\gamma - R_B \cos 30 = 0$$

$$\Sigma P_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A \sin\gamma - F + R_B \sin 30 = 0$$

gdzie poza nieznanymi siłami R_A i R_B jest użyty pomocniczy kąt $\gamma = \angle RAC$, którego wielkość należy wyznaczyć z warunków geometrycznych zadania. Taką możliwość zapewnia twierdzenie Rittera, które gwarantuje statyczną wyznaczalność całego zadania (2 niewiadome i 2 równania), a pomocniczy kąt γ jest tylko konsekwencją wynikającą z istnienia punktu Rittera formującego ΔABR.

Na podstawie danych wymiarowych belki oraz znajomości kąta $\angle CBR = 30°$ można wyznaczyć długości boków ΔABR, a w szczególności:
z ΔRCB prostokątnego mamy:

$$\frac{CB}{RB} = \cos\ 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{skąd} \qquad RB = \frac{CB}{\cos 30} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} = 4\sqrt{3}$$

i podobnie

$$\frac{RC}{RB} = \sin 30 = \frac{1}{2} \qquad \text{skąd} \qquad RC = RB \sin 30 = 2\sqrt{3}$$

a z ΔACR prostokątnego mamy $\gamma = \angle RAC$

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60^\circ \text{ czyli } \Delta ABR \text{ jest też prostokątny}$$

Zadanie jest więc statycznie wyznaczalne, a wtedy układ równań wyjściowych przyjmuje postać:

$$\Sigma P_{ix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A(1/2) - R_B(\sqrt{3}/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = R_D\sqrt{3}$$

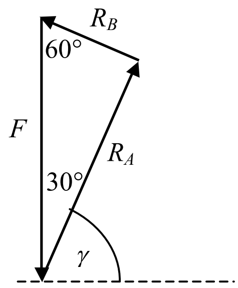
$$\Sigma P_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_A(\sqrt{3}/2) - F + R_B(1/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A\sqrt{3} = 2F - R_B$$

skąd otrzymuje się

$$\boxed{\begin{array}{l} R_A = F\sqrt{3}/2 = 30\sqrt{3}/2 = 15\sqrt{3}\text{ kN} \\ R_B = F/2 = 30/2 = 15\text{ kN} \end{array}}$$

Warto też zwrócić uwagę na możliwość rozwiązania zadania bez formalnego zapisu warunków równowagi, a wprost ze związków geometrycznych w trójkątach podobnych.

Dzięki istnieniu i poprawnemu zlokalizowaniu punktu Rittera (układ 3 sił zbieżnych), możliwa będzie analiza kątów wieloboku (*tu: trójkąta prostokątnego*) sił $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R_A}$ i $\boldsymbol{R_B}$ z kątami 30°, 60° i 90° podobnego do ΔABR. Ponieważ jest on połową trójkąta równobocznego, to szybko da się wyznaczyć długości jego boków



$$F = 2R_B$$

skąd podobnie

$$\boxed{\begin{array}{l} R_A = F\sqrt{3}/2 = 30\sqrt{3}/2 = 15\sqrt{3}\text{ kN} \\ R_B = F/2 = 30/2 = 15\text{ kN} \end{array}}$$

B) Rozwiązanie z wykorzystaniem dołączonego warunku $\Sigma M_{io} = 0$

Zamiast pomocniczego kąta γ, zostaną jawnie użyte składowe sił reakcji R_{Ax} i R_{Ay}. Jako punkt odniesienia O wygodnie jest obrać taki punkt, w którym wystąpi najmniej niewiadomych. Obrano nim punkt A, ponieważ składowe sił reakcji R_{Ax} i R_{Ay} mają wtedy zerowe ramiona i nie wystąpią w równaniu bilansu dla momentów.

Warunek równowagi przyjmuje teraz postać 3 równań o 3 niewiadomych R_{Ax}, R_{Ay}, i R_B

$$\Sigma P_{ix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ax} - R_B\cos 30 = 0 \quad \Rightarrow R_{Ax} = R_B\sqrt{3}/2$$

$$\Sigma P_{iy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ay} - F + R_B\sin 30 = 0 \quad \Rightarrow R_{Ay} = F - R_B/2$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2F + 8R_B\sin 30 = 0 \quad \Rightarrow R_B = F/2$$

skąd

$$\boxed{\begin{array}{l} R_B = 15\text{ kN} \\ R_{Ax} = 15\sqrt{3}/2\text{ kN} \\ R_{Ay} = 30 - 15/2 = 22{,}5\text{ kN} \end{array}}$$

Ze składowych R_{Ax} i R_{Ay} można wyznaczyć długość całego wektora $\boldsymbol{R_A}$

$$R_A = \sqrt{225 \cdot \frac{3}{4} + \frac{2025}{4}} = \sqrt{\frac{2700}{4}} = 15\sqrt{3}\text{ kN}$$

Czytelnikowi pozostaje samemu ocenić przydatność każdej z w/w metod.