STATYKA – WYZNACZANIE SIŁ REAKCJI

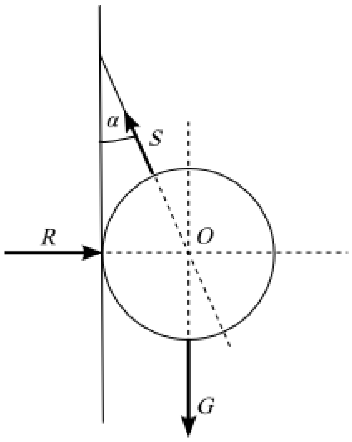
Przykładowe rozwiązania zadań w oparciu o twierdzenie o 3 siłach w układzie płaskim i zbieżnym

Zadanie 1

Przy pionowej ścianie zawieszono jednorodną kulę. Lina tworzy ze ścianą kąt α, a ciężar kuli wynosi P. Wyznaczyć siłę naciągu liny S i reakcję ściany R.

Opis zadania:

Skorzystamy z tw. o 3 siłach, które orzeka, że dla zachowania równowagi układu, muszą one mieć punkt wspólnego przecięcia, zwany punktem Rittera i tworzyć geometrycznie trójkąt zamknięty. Są nimi siły $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{S}$ leżące w jednej płaszczyźnie. Kierunki (linie działania tych sił) wynikają z rodzaju skojarzonych z nimi więzów i są odpowiednio takie: $\boldsymbol{G} \| Oy$ (grawitacja), $\boldsymbol{R} \perp Oy$ (oparcie o ścianę i jedyna składowa pozioma) oraz $\boldsymbol{S}$ zgodne z kierunkiem naciągniętej liny.



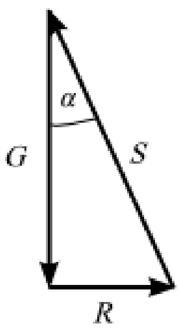
To, że przedłużenie naciągniętej liny przejdzie przez punkt O wynika właśnie z tw. o 3 siłach. Inne ułożenie kuli z naciągniętą liną nie jest możliwe w warunkach równowagi **i braku tarcia.** Gdyby dopuścić tarcie, dochodzi czwarta siła i rozwiązania nie da się wyznaczyć w oparciu o w/w twierdzenie.

Rozwiązanie:

Metoda geometryczna

Zapis wektorowy warunku równowagi

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$$



Interpretacja geometryczna – zamknięty trójkąt sił o długościach boków równych długości wektorów go tworzących. Powstały trójkąt jest prostokątny i zachodzą w nim oczywiste zawiązki trygonometryczne:

$$G = S\cos\alpha \Rightarrow S = \frac{G}{\cos\alpha}$$

$$R = G\tan\alpha$$

co stanowi rozwiązanie zadania.

Metoda analityczna

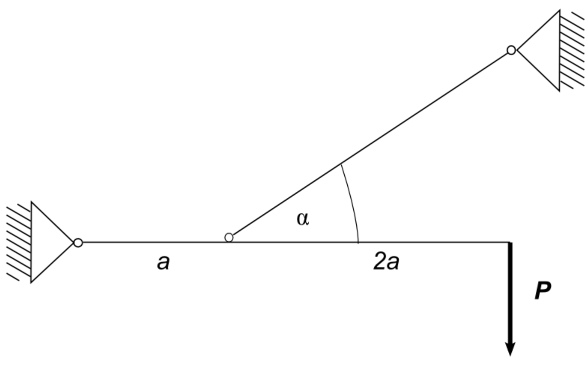
Zapis analityczny warunku równowagi układu sił zbieżnych płaskich

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0 \\ \sum P_{iy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ox: \; -S\sin\alpha + R = 0 \\ Oy: \; S\cos\alpha - G = 0 \end{cases}$$

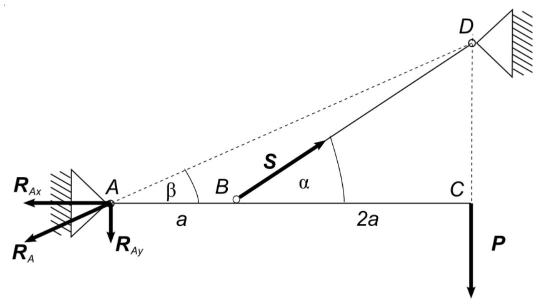
który kończy się identycznym rozwiązaniem, jak w metodzie geometrycznej.

Zadanie 2

Dla układu jak na rysunku obok wyznaczyć reakcje w węzłach. Jako dane przyjąć: a, P oraz α. Wykonać obliczenia dla $\alpha = 30°$.



Opis zadania:



Układ sił w zadaniu jest płaskim i zbieżnym. Kierunek siły czynnej ***P*** przecina się z kierunkiem reakcji ***S*** pręta dwuprzegubowego *BD* w punkcie *D*. Kierunek reakcji $\boldsymbol{R_A}$ też musi przechodzić przez ten punkt, zwany też punktem Rittera. Można ją ponadto rozłożyć na dwie składowe w kierunkach osi *Ox* i *Oy*.

Dla dalszej wygody zapisu, można wprowadzić dodatkowy kąt β, ale niezbędne będzie później jego wyznaczenie z warunków zadania.

Rozwiązanie metodą analityczną:

Dla płaskiego zbieżnego układu sił piszemy dwa równania równowagi postaci:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0 \Rightarrow -R_A \cos\beta + S\cos\alpha = 0 \\ \sum P_{iy} = 0 \Rightarrow -P + S\sin\alpha - R_A \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Kąt β wyznaczamy z zależności w trójkącie *DCB*:

$$\tan\alpha = \frac{DC}{2a} \Rightarrow DC = 2a\tan\alpha \Rightarrow \tan\beta = \frac{2}{3}\tan\alpha$$

Z pierwszego równania równowagi wyznaczamy wartość siły reakcji R_A w zależności od siły rozciągającej *S* pręta *BD*

$$R_A = S\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Z drugiego równania wyznaczamy wartość tej siły

$$-P + S\sin\alpha - S\cos\alpha\tan\beta = 0 \Rightarrow S = P\frac{1}{\sin\alpha - \cos\alpha\frac{2}{3}\tan\alpha} = \frac{3P}{\sin\alpha}$$

I w końcu reakcja R_A wynosi:

$$R_A = \frac{3P}{\sin\alpha}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{3P}{\tan\alpha\cos\beta}$$

Dla $\alpha = 30°$ kąt $\beta = \arctan\left(\frac{2}{3}\tan\alpha\right) = 21°3'$ a wtedy siły reakcji przyjmują odpowiednio wartości:

$$S = \frac{3P}{\sin 30°} = 6P$$

$$R_A = \frac{3P}{\tan 30° \cdot \cos 21°3'} \approx 5{,}57P$$

Znaki dodatnie przy tych wartościach świadczą o dobrej intuicji i poprawnie obranych zwrotach sił reakcji.

Do studiowania dalszych przykładów i samodzielnych ćwiczeń polecam np. książkę:
Jarosław Brodny: Podstawy statyki, zbiór zadań z rozwiązaniami, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2009