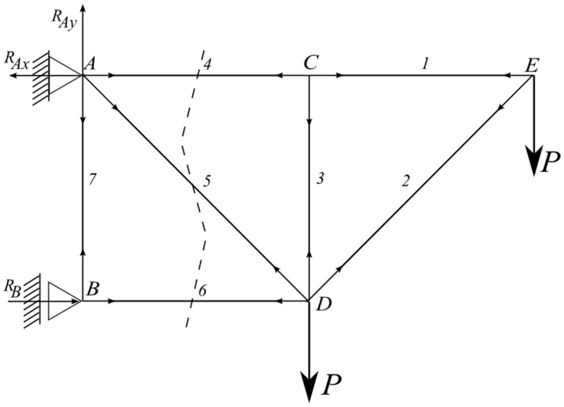
Obliczanie kratownic z zastosowaniem dwóch metod

Obliczyć reakcje w podporach A, B oraz siły wewnętrzne w prętach nr 4, 5 i 6 kratownicy pokazanej na rysunku, na którym naniesiono już działanie wszystkich sił układu.



Zauważamy, że układ jest statycznie wyznaczalny, gdyż wobec p = 7 prętów i w = 5 węzłów spełnione jest równanie $p = 2w - 3$.

Analityczna metoda węzłów

Wycinamy myślowo poszczególne węzły z kratownicy, a w miejscu przecięć przykładamy siły wewnętrzne, zakładając ich kierunki na zewnątrz węzła, czyli przyjmując, że pręty są rozciągane. Jeśli w wyniku rachunków otrzymamy dla pewnych sił znak ujemny, będzie to oznaczało, że założenie było niesłuszne i pręt jest ściskany.

Traktując kratownicę jako ciało sztywne znajdujemy jego warunek równowagi w oparciu o bilans sił zewnętrznych oraz sił reakcji (bez udziału sił w ściskających/rozciągających w prętach).

Σ_x: $R_B - R_{Ax} = 0$ $\qquad$ $R_{Ax} = 3P$

Σ_y: $R_{Ay} - P - P = 0$ $\qquad$ skąd $\qquad$ $R_{Ay} = 2P$

M_A: $R_{Ax}a - Pa - P \cdot 2a = 0$ $\qquad$ $R_B = 3P$

Po wyznaczeniu sił reakcji, możliwe jest rozpisanie rozkładu sił (również działających w prętach) po dwa równania dla każdego węzła. Wybieramy taką kolejność, która sukcesywnie prowadzi do szybkiego wyznaczenia kolejnych p = 7 niewiadomych S_1, S_2, ... S_7, choć w istocie jest ona obojętna, a może być co najwyżej tylko bardziej pracochłonna.

dla węzła E:

Σ_x: $-S_1 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\qquad$ $S_1 = P$

Σ_y: $S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$ $\qquad$ skąd $\qquad$ $S_2 = P\sqrt{2}$

dla węzła C:

Σ_x: $-S_4 + S_1 = 0$ $\qquad$ $S_3 = 0$

Σ_y: $-S_3 = 0$ $\qquad$ skąd $\qquad$ $S_4 = P$

dla węzła B:

Σ_x: $-S_6 + R_B = 0$ $\qquad$ $S_6 = R_B = 3P$

Σ_y: $S_7 = 0$ $\qquad$ skąd $\qquad$ $S_7 = 0$

dla węzła A:

Σ_x: $\quad -R_{Ax} + S_4 + S_5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\qquad$ $S_5 = R_{Ax} - S_4 = 2P\sqrt{2}$

Σ_y: $\quad R_{Ay} - S_7 - S_5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\qquad$ skąd $\qquad$ S_4 *– już wyznaczone z C*

Jak widać, nie wszystkie pary równań w węzłach muszą być wzięte pod uwagę, gdyż pozostałe równania miałaby charakter tożsamościowy, czyli potwierdzałyby już wcześniej uzyskane odpowiedzi. Na przykład kolejne, ósme równanie posłużyło tylko do ponownego wyznaczenia wartości S_4.

Analityczna metoda przecięć, zwana też metodą Rittera
Pozwala bezpośrednio wyznaczyć siłę w określonym pręcie lub kilku prętach kratownicy naraz, niezależnie od sił w pozostałych prętach. Polega na umyślnym jej rozcięciu przez obliczane pręty w taki sposób, aby odciąć jedną części kratownicy od drugiej i na niej skupić dalszą analizę. /linia cięcia = linia przerywana na rysunku/

Odcięta część pozostaje w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy zostanie spełniony warunek, którego jedna z postaci dotyczy bilansu dwóch momentów względem wybranych biegunów i rzutów sił na oś, która nie może być ortogonalna do prostej łączącej wybrane bieguny pod momentów i sił. Obierając jako bieguny punkty *B* i *C* a za oś rzutowania oś *Oy* oraz przyjmując że długość cięgien poziomych/pionowych wynosi *a*, otrzymujemy:

$$\Sigma M_C = 0 : -P \cdot a + S_6 \cdot a - S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0$$
$$\Sigma M_B = 0 : -P \cdot a + S_4 \cdot a = 0$$
$$\Sigma P_{Oy} = 0 : -2P - S_3 + S_3 + S_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

skąd dostaniemy

$$S_4 = P$$
$$S_5 = 2P\sqrt{2}$$
$$S_6 = 3P$$

czyli dokładnie to samo, co poprzednią metodą, ale w znacznie krótszy sposób.