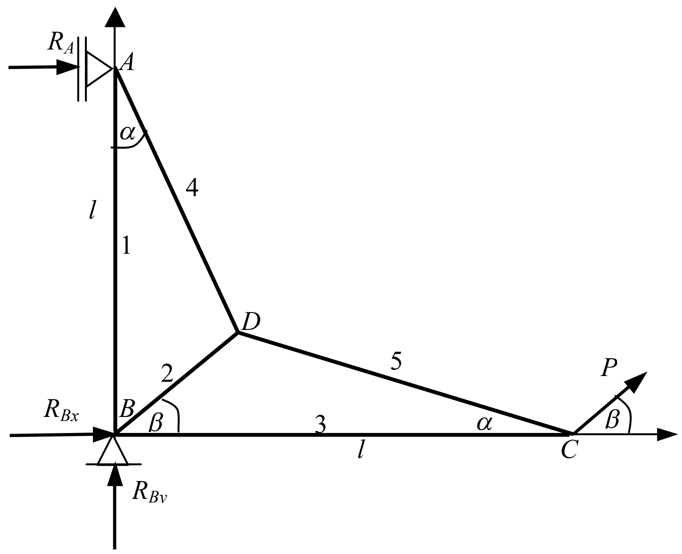
Zadanie z wytrzymałości materiałów (kratownice)

Kratownica płaska obciążona jest i podparta w sposób pokazany na rysunku. Dane: $P = 10$ kN, $l = 2$ m, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$. Wyliczyć z kryterium wytrzymałości pręta na rozciąganie lub ściskanie przekroje prętów, jeśli naprężenie dopuszczalne σ_{dop}=100 MPa. Przekroje wszystkich prętów są jednakowe.



Zbiór prętów prostych połączonych przegubowo w węzłach, na które działają siły skupione, zwany jest kratownicą. Jeśli pręty i siły w węzłach leżą w jednej płaszczyźnie, kratownica zwie się płaską.

Z warunków równowagi sił działających na kratownicę jako ciało sztywne zostaną wyznaczone siły reakcji R_A, R_{Bx} i R_{By} o zwrotach przyjętych jak na rysunku.

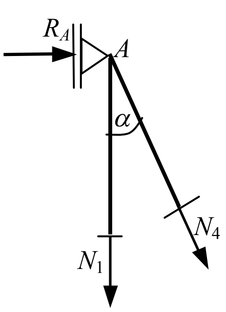
$$\begin{aligned} -R_A l + Pl\sin\beta &= 0 \\ R_{Bx} + P\cos\beta &= 0 \\ R_{By} + P\sin\beta &= 0 \end{aligned} \qquad \text{skąd} \qquad \begin{aligned} R_A &= P\sin\beta \\ R_{Bx} &= -P\cdot(\sin\beta + \cos\beta) \\ R_{By} &= -P\sin\beta \end{aligned} \tag{1}$$

W przekrojach prętów działają nieznane siły naprężenia normalnego, które zostaną wyznaczone metodą analityczną węzłową, zwaną też metodą zrównoważenia węzłów. Skoro kratownica pozostaje w równowadze, to w równowadze są również siły działające w jej poszczególnych węzłach, włączając w to siły reakcji, siły zewnętrzne i siły naprężenia normalnego. Dla każdego węzła można napisać dwa równania równowagi (rzuty sił na osie), a o wewnętrznej statycznej rozwiązalności kratownicy decyduje spełnienie równania kojarzącego ze sobą liczbę węzłów (w) i liczbę prętów (p).

$$2\text{w} - 3 = \text{p} \tag{2}$$

Lewą stronę stanowi liczba możliwych do sformułowania równań równowagi, pomniejszona o 3 równania dotyczące całej kratownicy, a prawą stronę – liczba prętów. Można sprawdzić, że dla kratownicy z tego zadania równanie powyższe jest spełnione, bowiem p = 5, w = 4, a więc 2·5 – 3 = 5.

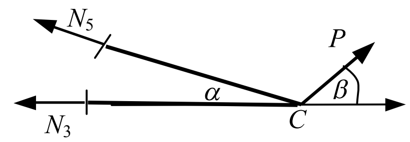
Poddane zostaną analizie poszczególne węzły, a dla płaskich zbieżnych układów sił, które działają na nie, zostaną napisane warunki równowagi.



$$\begin{aligned} +R_A + N_4\sin\alpha &= 0 \\ -N_1 - N_4\cos\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

skąd

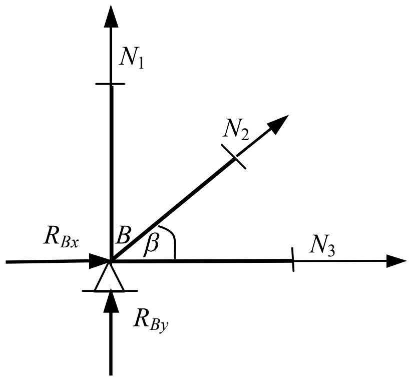
$$\begin{aligned} N_4 &= -P\sin\beta/\sin\alpha \\ N_1 &= P\cdot(\sin\beta/\sin\alpha)\cos\alpha \end{aligned} \tag{4}$$



$$P\cos\beta - N_3 - N_4\cos\alpha = 0$$
$$P\sin\beta + N_5\sin\alpha = 0 \qquad (5)$$

skąd

$$N_5 = -P\sin\beta / \sin\alpha$$
$$N_3 = P\cdot\left(\cos\beta + \left(\sin\beta / \sin\alpha\right)\cos\alpha\right) \qquad (6)$$



$$N_2\cos\beta + N_3 + R_{Bx} = 0$$
$$N_2\sin\beta + N_1 + R_{By} = 0 \qquad (7)$$

skąd

$$N_2 = P\cdot\left(\sin\beta / \cos\beta\cdot(1-\cos\alpha / \sin\alpha)\right)$$
$$N_2 = P\cdot\left(1-\cos\alpha / \sin\alpha\right) \qquad (8)$$

Wobec założenia, że $\beta = 45°$, zachodzi $\sin\beta = \cos\beta$ i dlatego obydwa wyliczenia wielkości N_2 są identyczne, co potwierdza poprawność rozwiązania.

Równania równowagi dla węzła D nie są już potrzebne, gdyż R_A, R_{BX} i R_{By} zostały już wyznaczone z równań równowagi całej kratownicy (1).

Po wstawieniu danych liczbowych, otrzymuje się:

$$N_1 = P\sqrt{6}/2 = 1{,}22P$$
$$N_2 = P\left(1-\sqrt{3}\right) = -0{,}73P$$
$$N_3 = P\sqrt{2}/2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right) = 1{,}93P \qquad (9)$$
$$N_4 = -P\sqrt{2} = -1{,}41P$$
$$N_5 = -P\sqrt{2} = -1{,}41P$$

- ujemne wartości sił N_2, N_4 i N_5 oznacza, że pręty 2, 4 i 5 są ściskane.

Ponieważ największa wartość siły naprężającej $N_3 = 1{,}93P = 19{,}3$ kN, a pręty mają jednakowy przekrój A, kryterium wytrzymałości na rozciąganie będzie miało postać:

$$\sigma_{\max} = N_3 / A \le \sigma_{dop} \qquad \text{skąd} \qquad A \ge N3 / \sigma_{dop} = 19{,}3\cdot 10^{-3} / 100\ m^2 = 1{,}93\ cm^2$$