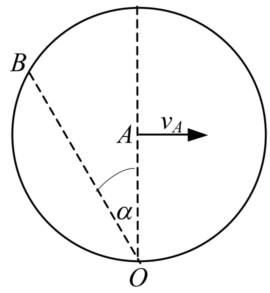
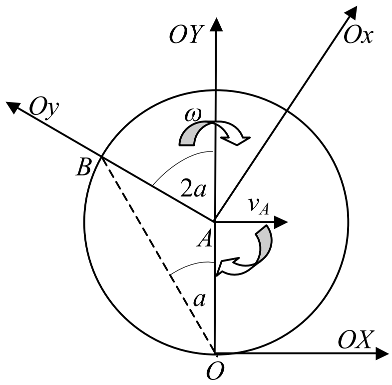
Zadanie ilustrujące 3 sposoby wyznaczenia prędkości w ruchu płaskim

Koło o promieniu r toczy się bez tarcia ze stałą prędkością kątową ω. Wyznaczyć prędkość v_B punktu B, jeśli znana jest prędkość środka koła v_A. Należy przyjąć, że cięciwa OB tworzy z odcinkiem OA kąt α.



A) metoda analityczna

Wprowadza się nieruchomy układ odniesienia OXY oraz ruchomy Oxy, jak na rysunku. Wtedy punkt B w układzie Oxy ma współrzędne $B = B(x,y) = (0, r)$. Zauważamy, że skoro koło toczy się, to wszystkie jego punkty obracają się wokół środka A z prędkością ω. Aby powiązać jej wielkość z podanym kątem α, należy przyjąć ujemny znak względem czasu. Korzystając z pojęcia kąta środkowego i kąta opartego na cięciwie zachodzą związki: $2\alpha = \varphi = -\omega t$, czyli $\alpha = \varphi/2 = -\omega t/2$.



Tor punktu A względem OXZ opisują równania

$$X_A(t) = v_A t$$

$$Y_A(t) = r = const$$ a położenie punktu B względem A wyraża się wzorami

$$\varphi(t) = 2\alpha(t) = -\omega t$$

$$X_B = X_A + x\cos\varphi - x\sin\varphi = X_A + r\sin\omega t$$

$$Y_B = Y_A + x\sin\varphi + y\cos\varphi = Y_A + r\cos\omega t$$

Po zróżniczkowaniu otrzymamy prędkość punktu B, uwzględniając jednocześnie, że $v_A = v_{Ax}$ i $v_{Ay} = 0$

$$v_{Bx} = v_{Ax} + \omega r\cos\omega t = v_A + \omega r\cos\omega t$$

$$v_{By} = v_{Ay} - \omega r\sin\omega t = -\omega r\sin\omega t$$

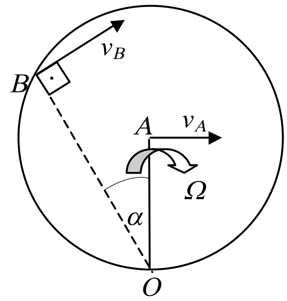
wiedząc, że $v_A = \omega r$, wtedy długość, czyli wartość v_B wynosi

$$v_B^2 = v_A^2 + 2v_A\omega r\cos\omega t + \omega^2 r^2\cos^2\omega t + \omega^2 r^2\sin^2\omega t = v_A^2\left(2(1+\cos\omega t)^2\right) = 4v_A^2\cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\boxed{v_B = 2v_A\cos\frac{\omega t}{2} = 2v_A\cos(-\alpha) = 2v_A\cos\alpha}$$

B) metoda chwilowego środka obrotu

Należy zauważyć, że z powodu braku tarcia, chwilowym środkiem obrotu jest punkt O, względem którego wszystkie punkty wykonują obrót z prędkością kątową Ω. Trudno to wykazać na mocy tw. Eulera, ponieważ znana jest tylko prędkość v_A i cała rodzina do niej równoległych wektorów prędkości zamocowanych na przedłużeniu promienia OA. Nie można zatem znaleźć punktu przecięcia **dwóch różnych** prostych, które są prostopadłe do wektorów tych prędkości.

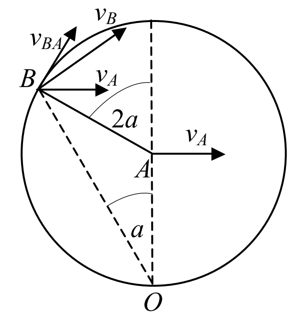


Jeśli O jest środkiem chwilowego obrotu, to wiadomo że $v_A = \Omega r$, skąd $\Omega = v_A/r$, a ponieważ wektor $\mathbf{v}_B$ musi być ortogonalny do OB, można wyznaczyć jego prędkość jako zwykły iloczyn skalarny

$$\boxed{v_B = \Omega \cdot \mathrm{O}B = (v_A/\mathrm{r}) \cdot 2r\cos\alpha = 2\, v_A \cos\alpha}$$

C) metoda superpozycji

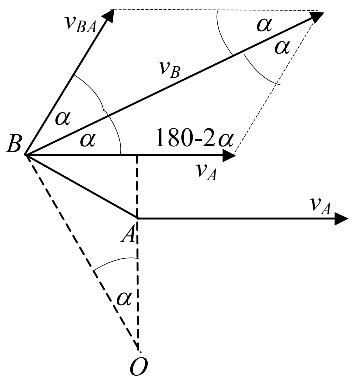
Jedynym kandydatem do miana punktu odniesienia (*bieguna*) jest środek okręgu, czyli punkt A o znanej prędkości. Zgodnie z w/w zasadą, wektor prędkości w punkcie B jest sumą geometryczną wektora prędkości unoszenia punktu A i wektora prędkości obrotu punktu B względem A.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

O składnikach prawej strony wiadomo, że są ortogonalne do odcinków BA i BO odpowiednio ($\vec{v}_{BA} \perp BA$ oraz $\vec{v}_B \perp BO$). Fakt ten pomoże w określeniu kątów równoległoboku zbudowanego z wektorów tych sił (*na rysunku w powiększeniu*).

Szczegółowa analiza pozwala stwierdzić (*tw. o kątach o ramionach odpowiednio prostopadłych*), że jest on w istocie rombem o boku $v_{BA} = v_A$. Na mocy twierdzenia cosinusów, mamy wtedy:



$$v_B^2 = v_{BA}^2 + v_A^2 - 2v_{BA}v_A\cos(180-2\alpha) = v_A^2\left(2(1+\cos 2\alpha)^2\right) =$$
$$= 4v_A^2\cos^2\alpha$$

$$\boxed{v_B = 2v_A\cos\alpha}$$